УДК 517.53

ПРИМЕНЕНИЕ ЯДЕР СЕГЕ ДЛЯ АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИЙ РЯДАМИ [1]

© Н. А. Малашонок

Ключевые слова: функции многих комплексных переменных; ядра Сегё; простые дроби; ряды аналитических функций.

Аннотация: Для заданной полной кратно-круговой области D строится последовательность функций $h_m(z)$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, позволяющая разложить в ряд по этой системе функции, аналитические в $\overline{D}$. При этом используется ядро Сегё области, состоящей из точек z^2 при $z \in D$.

Разложение функций $f(z)$, аналитических в замкнутом единичном круге $\overline{D}$, в ряд простых дробей:

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{1 - \beta_m z}\ , \tag{1}$$

изучалось в [3], [4]. Здесь предполагается, что последовательность β_m лежит в D, т. е. $|\beta_m| < 1$, и что $|\beta_m| \to 1$ при $m \to \infty$. Замечательный факт состоит в том, что ряд (1) сходится к функции $f(z)$ равномерно внутри D тогда и только тогда, когда существует нетривиальное разложение нуля в такой ряд. Отсюда вытекает неоднозначность разложения функции в ряд (1), то есть переполненность системы функций $(1 - \beta_m z)^{-1}$.

Мы хотим обобщить эту теорию для функций многих комплексных переменных. Покоординатное умножение векторов $z, w \in \mathbb{C}^p$ будем обозначать zw, т. е. $zw = (z_1 w_1, \ldots, z_p w_p)$. Мы будем использовать мультииндексные обозначения: если $n = (n_1, \ldots, n_p)$, то $|n| = n_1 + \ldots + n_p$, $z^n = z_1^{n_1} \ldots z_p^{n_p}$, $|z|^n = |z_1|^{n_1} \ldots |z_p|^{n_p}$.

Пусть $\beta^{(m)}$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, – последовательность точек в $\mathbb{C}^p$ таких, что для каждого $k = 1, \ldots, p$ мы имеем $|\beta_k^{(m)}| < 1$, $|\beta_k^{(m)}| \to 1$ при $m \to \infty$.

Наша первая задача – для данной полной кратно-круговой области $D \subset \mathbb{C}^p$ построить аналог $h(z)$ простой дроби $(1 - z)^{-1}$.

После этого мы организуем последовательность $h_m(z) = h(\beta_m z)$ и получаем задачу о разложении в ряд в $\overline{D}$ функций $f(z)$:

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m h_m(z).$$

Для построения функции $h(z)$ мы используем одно свойство ядер Сегё [1], [2]. Обозначим через $D^{(2)}$ область, состоящую из точек z^2 при $z \in D$. Обозначим через $\partial D^{(2)}$ границу $D^{(2)}$, и $|\partial D^{(2)}|$ – ее образ в положительном октанте модулей. Пусть λ – некоторая конечная мера на $|\partial D^{(2)}|$. Обозначим

$$\gamma_n(D) = \left(\int_{|\partial D^{(2)}|} |z|^n d\lambda \right)^{-1}$$

Наша искомая функция есть

$$h(z) = \sum_n \gamma_n(G) z^n.$$

[1]Работа поддержана грантами: Научной Программой "Развитие Научного Потенциала Высшей Школы" РНП 2.1.1/1474 и Темпланом 1.5.07.

Она тесно связана с ядром Сегё $K(z,\overline{\xi})$ области $D^{(2)}$, оно есть $h(z\overline{\xi})$.

П р и м е р 1. Пусть $D=\left\{(z_1,z_2): \ |z_1|^2+|z_2|^2<1\right\}$. Тогда

$$\gamma_n(G)=\frac{(n_1+n_2+1)!}{n_1!n_2!} \ ,$$

так что

$$h(z)=(1-z_1-z_2)^{-2}.$$

П р и м е р 2. Пусть $D=\{(z_1,z_2): \ |z_1|+|z_2|<1\}$. Тогда

$$\gamma_n(D)=\frac{(2n_1+2n_2+1)!}{(2n_1)!(2n_2)!} \ ,$$

так что

$$h(z)=\frac{(1-z_1-z_2)(1+2z_1z_2-z_1^2-z_2^2)+8z_1z_2}{((1-z_1-z_2)^2-4z_1z_2)^2}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Айзенберг Л. А., Митягин Б. С.* Пространства функций, голоморфных в n-круговых областях // Сиб. матем. ж. 1960. Т. 1. С. 153–170.

2. *Айзенберг ХЛ. А.* Интегральные представления функций, голоморфных в n-круговых областях ("продолжение ядер Сегё") // Матем. сб. 1964. Т. 65. С. 104–143.

3. *Леонтьева Т.А.* Об условиях представимости аналитических функций рядами рациональных дробей // Мат. заметки. 1974. Т. 15. № 2. С. 197–203.

4. *Коробейник ХЮ.Ф.* К вопросу о разложении аналитических функций в ряды по рациональным функциям // Мат. заметки. 1982. Т. 31. № 5. С. 723–727.

Abstract: For a full multicircular domain D, we construct a system of functions $h_m(z)$, permitting to expand functions analytic in $\overline{D}$, into a series over this system. For that, we use the Szegö kernel of the domain consisting of the points z^2 with $z\in D$.

Keywords: functions of several complex variables; Szegö kernel; partial fractions; series of analytic functions.

Малашонок Наталия Александровна
к. ф.-м. н., доцент
Тамбовский государственный университет
им. Г.Р. Державина
Россия, Тамбов
e-mail: nmalacshonok@yandex.ru

Natasha Malaschonok
candidate of phys.-math. sciences,
senior lecturer
Tambov State University named after
G.R. Derzhavin
Russia, Tambov
e-mail: nmalacshonok@yandex.ru